

Perturbaciones de carga en objetos compactos

J. MANJARRÉS*, L. A. NÚÑEZ* & U. PERCOCO**

Resumen. Se estudia el efecto de las perturbaciones de carga en la estabilidad de objetos compactos, anisótropos relativistas. Se muestra que, al menos para las ecuaciones de estado consideradas, esa estabilidad es muy sensible a fluctuaciones de la carga.

Abstract. The effect of perturbations of charge on the stability of compact objects is studied. It is shown that, at least for the equations of state considered, the stability of charged matter configurations is very sensible to these fluctuations.

1. Introducción

En 1971 Bekenstein [1] generaliza la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para el caso hidroelectrostático, y con ella surge la necesidad de entender el papel que juega la carga en el colapso gravitacional. A pesar del consenso que existe respecto a la neutralidad de carga de los objetos astrofísicos [2], recientemente se ha renovado el interés por el colapso gravitacional de objetos cargados [3] justificando la existencia objetos compactos cargados a través de ingeniosos mecanismos teóricos [4].

L. Herrera en 1992 introdujo el concepto de fractura (o vuelco “*overturning*”) para describir el comportamiento de distribuciones materiales cuando se apartan del equilibrio. Encontraron que solo perturbaciones conjuntas de densidad y anisotropía local (diferencia

Palabras y frases claves: Relatividad General, estabilidad, objetos compactos, estrellas relativistas.

Key words: General Relativity, stability, compact objects, relativistic stars.

PACS: 04.40.Dg, 95.30.Sf, 04.20.-q, 04.40.Nr.

* Centro de Física Fundamental, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela, y Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes, (CeCalCULA), Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela.

e-mail: nunez@ula.ve

** Centro de Física Fundamental, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida 5101, Venezuela, e-mail: upercoco@ula.ve

de presiones radiales y tangenciales) logran desestabilizar el sistema [5, 6, 7, 8]. Las perturbaciones son independientes, pero existía dificultad para establecer sus magnitudes (absolutas y relativas) por lo cual podrían, eventualmente, estar describiendo situaciones de fractura físicamente inviables. [5, 7, 8, 9]. Por ello, recientemente se retoma el problema de las fracturas a través de otro tipo de perturbaciones interpretadas en términos de la diferencia de velocidades del sonido tangenciales y radiales, $\delta\Delta/\delta\rho \sim v_{s\perp}^2 - v_{sr}^2$ [10].

En este trabajo mostramos resultados preliminares con los cuales se ilustra que las perturbaciones de carga son un factor influyente en la aparición de fracturas.

2. Fracturas (Cracking)

El concepto de fractura se fundamenta en la identificación de un punto dentro de la distribución material que registra un cambio de signo en la fuerza radial total, asociada con las aceleraciones relativas entre dos elementos de fluido contiguos. Consideremos la expresión para las aceleraciones de marea [7],

$$a^\alpha = h_\beta^\alpha u^\gamma (u_{;\mu}^\beta h_\nu^\mu \delta x^\nu)_{;\gamma}, \quad (1)$$

o equivalentemente

$$a^\alpha = \left[-R_{\beta\gamma\mu}^\alpha u^\beta u^\mu + h_\beta^\alpha \left(\frac{du^\beta}{ds} \right)_{;\gamma} - \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du_\gamma}{ds} \right] h_\nu^\gamma \delta x^\nu, \quad (2)$$

donde h_β^α representa el proyector sobre el tres-espacio ortogonal a la cuadrivelocidad u^α , mientras que δx^ν es el cuadvectores que conecta las dos partículas vecinas y $\frac{du^\alpha}{ds} \equiv u^\mu u_{;\mu}^\alpha$. El aporte del concepto de fractura es relacionar, en el instante en el cual la configuración se aparta del equilibrio, la cantidad R (relacionada con la ecuación de equilibrio hidrostático) con el escalar de expansión Θ para una distribución material esférica descrita por el elemento de línea de Schwarzschild, $ds^2 = e^\lambda dt^2 - e^\nu dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2)$ [7, 8]. Esto es,

$$R = \frac{dP_r}{dr} + (\rho + P_r) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right) - \frac{2}{r} (P_\perp - P_r), \quad (3)$$

o bien

$$R = -\frac{e^\lambda(\rho + P)}{e^{\nu/2}r^2} \int_0^a d\tilde{r} e^{\nu/2} \tilde{r}^2 \frac{d\Theta}{ds}. \quad (4)$$

Si una fractura ocurre para un punto $0 \leq r \leq a$ en una configuración, entonces $\frac{d\Theta}{ds}$ se anula en ese punto. Igualmente, la integral de la expansión en (4) muestra una contribución no-local de la expansión a la fractura.

3. Equilibrio hidroelectrostático

Para derivar la ecuación de equilibrio hidroelectrostático consideremos el elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5)$$

y el tensor de energía-impulso de la forma

$$T^{\nu\mu} = (\rho + P_t) u^\mu u^\nu - P_t g^{\mu\nu} + (P_r - P_t) s^\mu s^\nu + \frac{1}{4} \pi \left[F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right], \quad (6)$$

donde

$$s^\mu = (0, e^{-\lambda/2}, 0, 0), \quad u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad F_{[\alpha\beta, \gamma]} = 0 \text{ y } \left[(-g)^{\frac{1}{2}} F^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = 0. \quad (7)$$

Tal y como se puede apreciar en (6), el tensor de energía impulso está compuesto por la superposición de un fluido anisótropo (descrito mediante la presión radial P_r , la presión tangencial P_t , y la densidad de energía ρ) y la contribución del campo eléctrico generado por la distribución de carga $Q(t, r)$. Adicionalmente, $F^{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell asociado al campo eléctrico. Es inmediato que $T_{1;\mu}^\mu = 0$ implica que

$$-P' = -\frac{QQ'}{4\pi r^4} + (\rho + P) \left(4\pi r P - \frac{m}{r^2} + \frac{Q^2}{r^3} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} - 2 \frac{(P_r - P_t)}{r}, \quad (8)$$

donde la prima, $'$, indica la derivada ordinaria con respecto a r . La ecuación (8) generaliza la TOV anisótropa para fluidos anisótropos cargados [1] y puede ser escrita en término de variables adimensionales como

$$R = aR = \frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial \eta} - \frac{8\Lambda^2 \tilde{\xi}}{\pi \tau \eta^4} + \frac{\left(\zeta \tilde{\rho} + \tilde{P}_r \right) \left(4\pi \eta \tau \tilde{P}_r + \frac{\tilde{m}\Lambda}{\eta^2} - \frac{\tilde{\chi}\Lambda^2}{\eta^3} \right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta} + \frac{\Lambda^2 \tilde{\chi}}{\eta^2} \right)} - \frac{2\tilde{\Delta}}{\eta}, \quad (9)$$

donde

$$P_r = P_c \tilde{P}_r, \quad q = M \tilde{q}, \quad \rho = \rho_c \tilde{\rho}, \quad m = M \tilde{m}, \quad r = a \eta, \quad \Delta = P_c \tilde{\Delta}, \quad \chi = q^2, \\ \xi = \frac{1}{2} \frac{d\chi}{dr}, \quad \tau = a^2 P_c, \quad \zeta = \rho_c / P_c, \quad \text{y} \quad \Lambda = M/a.$$

4. Fracturas y perturbaciones de carga

Para iniciar el estudio de objetos cargados induciremos perturbaciones de carga y densidad. Esto es

$$\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi} \text{ implica } \tilde{\chi} \left(\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi}, \eta \right) = 2 \int_0^\eta \left(\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi} \right) d\bar{\eta} \approx 2\tilde{\chi} \left(\tilde{\xi}, \eta \right) + 2\eta\delta\tilde{\xi}, \quad (10)$$

de donde se sigue que

$$\delta\tilde{\chi} = 2\eta\delta\tilde{\xi} \quad (11)$$

para la carga, y para la densidad

$$\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho} \quad \text{implica} \quad \begin{cases} \tilde{P}_r(\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho}, \eta) \approx \tilde{P}_r(\tilde{\rho}, \eta) + \delta\tilde{P}_r \approx \tilde{P}_r(\tilde{\rho}, \eta) + \frac{\partial\tilde{P}_r}{\partial\tilde{\rho}}\delta\tilde{\rho}, \\ m(\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho}, \eta) = 4\pi \int_0^\eta (\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho})\tilde{\eta}^2 d\tilde{\eta} \approx m(\tilde{\rho}, \eta) + \frac{4\pi}{3}\eta^3\delta\tilde{\rho}, \end{cases} \quad (12)$$

con lo cual, al expandir alrededor de objetos neutros y sin gradientes de carga, i.e. $\tilde{\xi}_0 = 0$ y $\tilde{\chi}_0 = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} R \approx \underbrace{R_0(\rho, P_r, m, \Delta, r)}_{R_0=0} + \delta\tilde{\rho} \frac{\partial R}{\partial\tilde{\rho}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{P}_r \frac{\partial R}{\partial\tilde{P}_r} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} \\ + \delta\tilde{m} \frac{\partial R}{\partial\tilde{m}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{\xi} \frac{\partial R}{\partial\tilde{\xi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{\chi} \frac{\partial R}{\partial\tilde{\chi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Tomando en cuenta (10) y (12), \tilde{R} puede ser escrita de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & \left[\frac{1}{2\eta} \frac{\partial R}{\partial\tilde{\xi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \frac{\partial R}{\partial\tilde{\chi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} \right] \delta\tilde{\chi} \\ & + \left[\frac{\partial R}{\partial\tilde{\rho}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \frac{\partial P_r}{\partial\tilde{\rho}} \frac{\partial R}{\partial\tilde{P}_r} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\partial R}{\partial\tilde{m}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} \right] \delta\tilde{\rho}. \end{aligned} \quad (14)$$

Al efectuar las respectivas derivadas tendremos que

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & - \left(\frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P})\Lambda^2}{\eta^3 \left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}) \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right)\Lambda^2}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)^2 \eta^2} + \frac{1}{16} \frac{\Lambda^2}{\tau\pi\eta^5} \right) \delta\tilde{\chi} + \\ & \left(\frac{Z \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau^2}{3} \frac{\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \left(\eta + \frac{2 \left(4\pi\tau\eta^3\tilde{P} + \Lambda\tilde{m}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau\eta \left(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \frac{\partial\tilde{P}}{\frac{\partial r}{\partial\tilde{\rho}}} \right) \delta\tilde{\rho}. \end{aligned} \quad (15)$$

Para mostrar los efectos que las perturbaciones de carga y densidad de energía tienen en modelos neutros, anisótropos y en equilibrio, evaluaremos (15) con los valores de ρ , P_r y P_t de los modelos: Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI (para detalles de los modelos pueden consultar [10]) y con los parámetros de la Tabla 1.

Perfil de densidad	M/a	$P_c \times 10^{15} \text{ (1/cm}^2\text{)}$	$\rho_c \times 10^{15} \text{ (1/cm}^2\text{)}$
<i>Tolman VI</i>	0.214	—	—
<i>NL Stewart 1</i>	0.408	0.088	1.74
<i>NL Stewart 2</i>	0.390	1.910	2.14
<i>Gokhroo & Mehra</i>	0.004	0.299	2.09

Cuadro 1. Todos los parámetros han sido tomados para representar un objeto con $a = 10$ km.

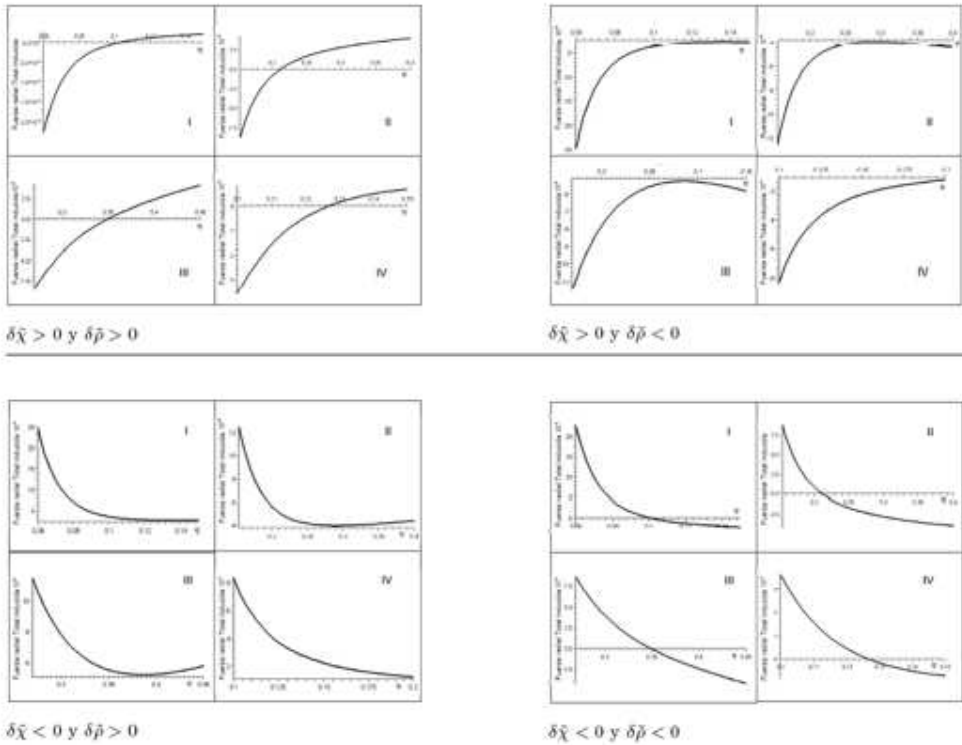


Figura 1. Fuerza radial total inducida al perturbar la carga y densidad de energía. Los cuadrantes I, II, III y IV corresponden a los modelos Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI, respectivamente. En la parte inferior de cada gráfica se indican los signos de las perturbaciones. Cuando las perturbaciones son de igual signo, hay cambio de signo en la fuerza total inducida generando fracturas.

5. Resultados y conclusiones

Tal y como se muestra en la Figura 1, es posible encontrar fracturas en las distribuciones estudiadas cuando las fluctuaciones de carga y densidad tienen el mismo signo, esto es, $\delta\rho > 0$ y $\delta\chi > 0$, ó $\delta\rho < 0$ y $\delta\chi < 0$. Las dimensiones de las perturbaciones de carga

y densidad se consideran independientes y se encontraron fracturas con perturbaciones relativas hasta del orden de 10^{-8} .

Agradecimientos. Este trabajo ha sido financiado por el Fondo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas FoNaCyT de Venezuela bajo los proyectos S1-2000000820 y F-2002000426.

Referencias

- [1] J.D. BEKENSTEIN, “Hydrostatic equilibrium and gravitational collapse of relativistic charged fluid balls”, *Phys. Rev. D*, 4(8):2185–2190, Oct 1971.
- [2] N.K. GLENDENNING, *Compact Stars: Nuclear Hysics, Particle Physics, and General Relativity*. Springer, 2000.
- [3] A. DI PRISCO, L. HERRERA, G. LE DENMAT, M.A.H. MACCALLUM & N.O. SANTOS, “Nonadiabatic charged spherical gravitational collapse”, *Phys. Rev. D*, 76(6):064017–+, September 2007.
- [4] H. MOSQUERA, A. PENNA & A. PÉREZ, “Charge asymmetry in the brane world and formation of charged black holes”, *Phys. Rev. D*, 67(8):087702, 2003.
- [5] L. HERRERA, “Cracking of self-gravitating compact objects”, *Physics Letters A*, 165(206-210), 1992.
- [6] L. HERRERA, “Cracking of self-gravitating compact objects (Physics Letters A 165 (1992) 206)”, *Physics Letters A*, 188:402–402, May 1994.
- [7] A. DI PRISCO, E. FUENMAYOR, L. HERRERA & V. VARELA, “Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects”, *Physics Letters A*, 195:23–26, 1994.
- [8] A. DI PRISCO, L. HERRERA & V. VARELA, “Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy”, *General Relativity and Gravitation*, 29(10):1239–1256, 1997.
- [9] H. ABREU, H. HERNÁNDEZ & L.A. NÚÑEZ, “Cracking of self-gravitating compact objects with a non local equation of state”, *Journal of Physics: Conference Series*, 66:012038, 2007.
- [10] H. ABREU, H. HERNÁNDEZ & L.A. NÚÑEZ, “Sound speeds, cracking and stability of self-gravitating anisotropic compact objects”, *Class. Quant. Grav.*, 24:4631–4646, 2007.

J. MANJARRÉS & L. A. NÚÑEZ
 Centro de Física Fundamental,
 Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
 Universidad de Los Andes, Mérida 5101, y
 Centro Nacional de Cálculo Científico,
 Universidad de Los Andes, (CeCaCULA),
 Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
 Mérida 5101, Venezuela. e-mail: nunez@ula.ve

U.PERCOCO
 Centro de Física Fundamental,
 Departamento de Física,
 Facultad de Ciencias,
 Universidad de los Andes,
 Mérida 5101, Venezuela
 e-mail: upercoco@ula.ve